جبر خطي (2) نظري

المحاضرة السادسة عشر والأخيرة

« بعيادتي منذ الامتحان ما يقارب 30 ب 35 علامة ☺ »

☼ تعريف الشكل الخطي :

هو تطبيق خطي منطلقه فضاء شعاعي ومستقره الحقل العددي المعرف فوقه هذا الفضاء.

★ الفضاء الثنوي :

تعريف الفضاء الثنوي : نفرض V فضاء شعاعي معرف فوق الحقل العددي K إن مجموعة كل الأشكال الخطية على V تشكل فضاء شعاعي معرف فوق الحقل K.
ويسمى الفضاء الثنوي للفضاء الشعاعي V والذي نرمز له بالرمز V^*

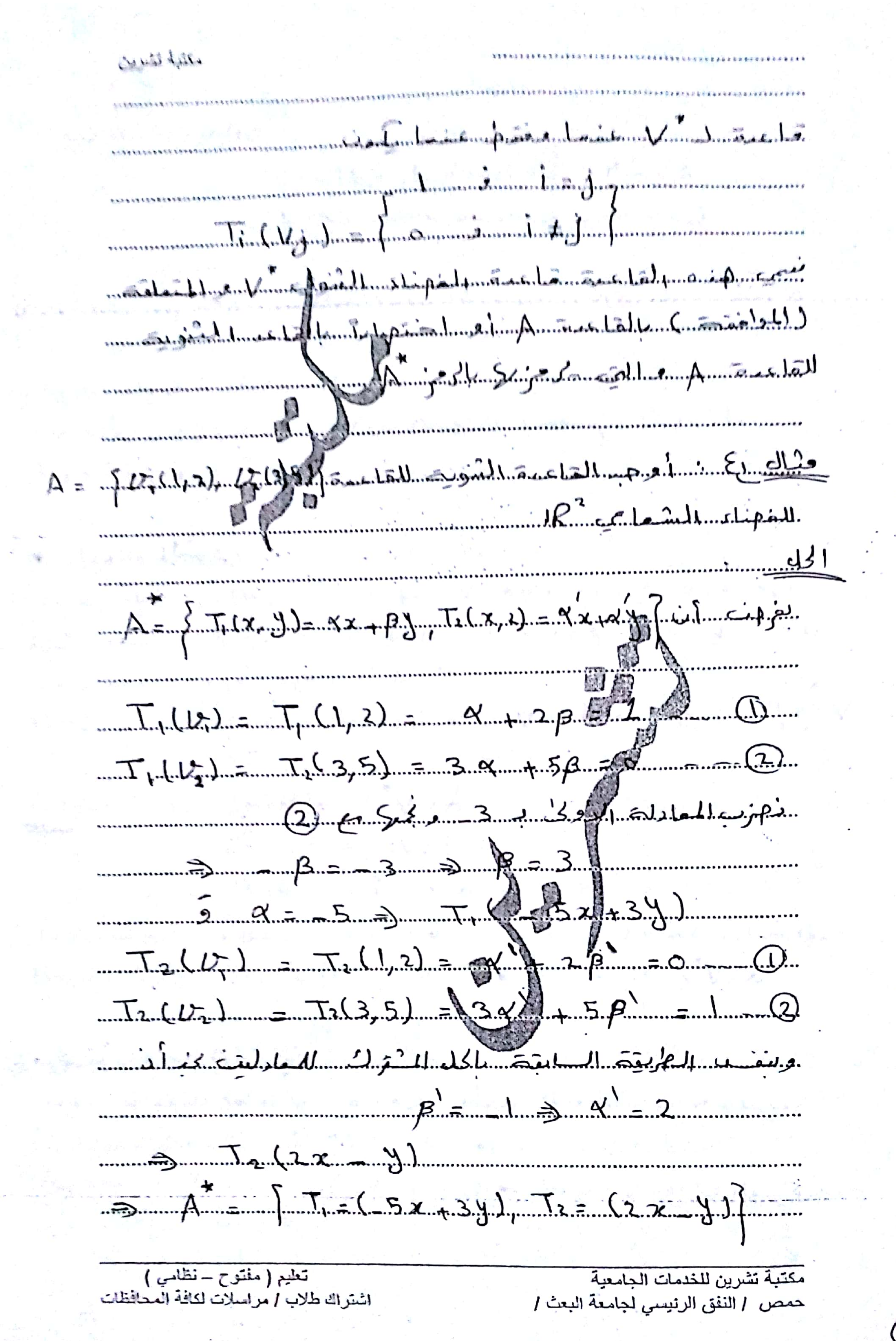
نتيجة :

$$d(V^*) = d(Hom(V,K))$$
$$= d(V) \cdot d(K)$$
$$= d(V) \cdot 1 = d(V)$$

أي أن قياس الفضاء الثنوي لفضاء شعاعي ما يساوي قياس هذا الفضاء (أي أنه لو كان $d(V) = n \Leftarrow d(V^*) = n$)

☼ مبرهنة دون برهان ☼

نفرض V فضاء شعاعي معرف فوق الحقل K وقياسه n ونفرض أن الجملة $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ قاعدة لـ V ولتكن المجموعة $B = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ من الفضاء الشعاعي الثنوي



قاعدة لـ V^* عناصرها تحقق

$$T_i(V_j) = \begin{cases} 1 & \text{ف } i = j \\ 0 & \text{ف } i \neq j \end{cases}$$

نسمي هذه القاعدة قاعدة الفضاء الثنوي V^* المقابلة (المرافقة) بالقاعدة A أو اختصاراً بالقاعدة الثنوية للقاعدة A والتي نرمز لها بالرمز A^*

مثال ٤: أوجد القاعدة الثنوية للقاعدة $A = \{v_1(1,2), v_2(3,5)\}$ للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$.

الحل:

بفرض أن $A^* = \{T_1(x,y) = \alpha x + \beta y \,,\, T_2(x,y) = \alpha' x + \beta' y\}$

$T_1(v_1) = T_1(1,2) = \alpha + 2\beta = 1$ ——— ①

$T_1(v_2) = T_2(3,5) = 3\alpha + 5\beta = 0$ ——— ②

نضرب المعادلة الأولى بـ 3 ونجمع مع ②

$\Rightarrow -\beta = -3 \Rightarrow \beta = 3$

و $\alpha = -5 \Rightarrow T_1(-5x + 3y)$

$T_2(v_1) = T_2(1,2) = \alpha' + 2\beta' = 0$ ——— ①

$T_2(v_2) = T_2(3,5) = 3\alpha' + 5\beta' = 1$ ——— ②

وبنفس الطريقة السابقة بالحل المشترك للمعادلتين نجد أن

$\beta' = -1 \Rightarrow \alpha' = 2$

$\Rightarrow T_2(2x - y)$

$\Rightarrow A^* = \{T_1 = (-5x + 3y), T_2 = (2x - y)\}$

مثال 2: بفرض أن $A^* = \{T_1 = (-5x + 3y), T_2 = (2x - y)\}$ قاعدة الفضاء الثنوي $[R^2]^*$ والمطلوب: إيجاد القاعدة $A = \{v_1, v_2\}$ لـ R^2 والتي A^* هي قاعدتها الثنوية.

الحل: بفرض أن $A = \{v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)\}$ هي قاعدة لـ R^2 المطلوبة

$T_1(v_1) = T_1(x_1, y_1) = -5x_1 + 3y_1 = 1$ ---- ①

$T_2(v_1) = T_2(x_1, y_1) = 2x_1 - y_1 = 0$ ---- ②

نضرب المعادلة ② بـ 3 ونجمع مع الأولى

$\Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2$

$\Rightarrow v_1 = (1, 2)$

$T_1(v_2) = T_1(x_2, y_2) = -5x_2 + 3y_2 = 0$ ---- ①

$T_2(v_2) = T_2(x_2, y_2) = 2x_2 - y_2 = 1$ ---- ②

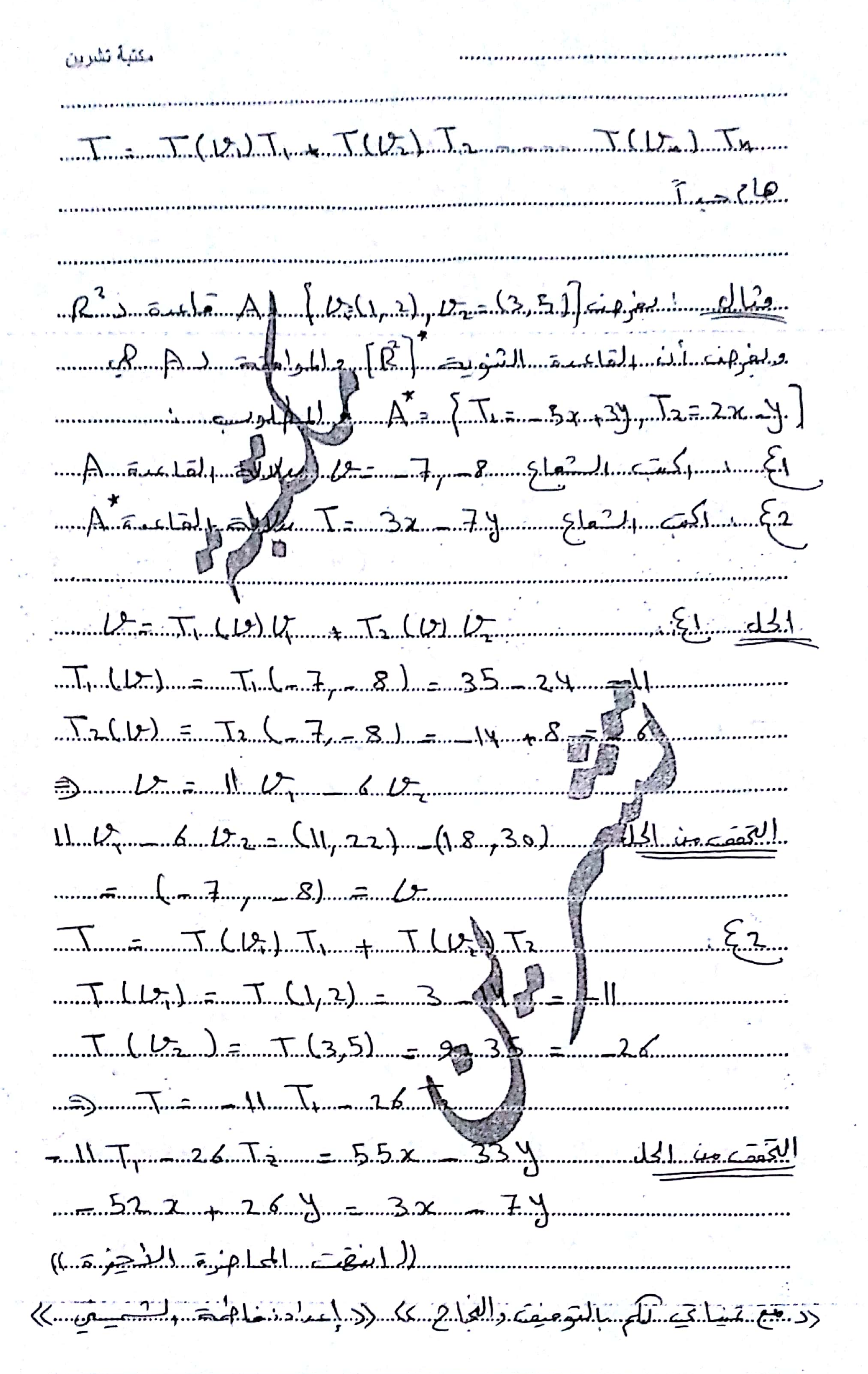
بالحل المشترك لجملة المعادلتين نجد أن

$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 5 \Rightarrow v_2 = (3, 5)$

مبرهنة: بفرض V فضاء شعاعي معرف فوق الحقل العددي K وقياسه n وبفرض أن $A = \{v_1, v_2 \text{------} v_n\}$ قاعدة لـ V وبفرض أن القاعدة الثنوية لـ S هي $A^* = \{T_1, T_2 \text{------} T_n\}$ إن:

1: $v = T_1(v)v_1 + T_2(v)v_2 \text{------} T_n(v)v_n$ هام جداً

2: من أجل أي شكل خطي $\{v \in V \text{ و } T \in V^*\}$ نجد أن



$T = T(v_1)T_1 + T(v_2)T_2 \dots T(v_n)T_n$

هام جداً

مثال: لنفرض $[v_1=(1,2), v_2=(3,5)]$ A قاعدة لـ R^2

ولنفرض أن القاعدة الثنوية $[R^2]^*$ والمرافقة لـ A هي

$A^* = \{T_1 = -5x + 3y, T_2 = 2x - y\}$ المطلوب:

ع1: اكتب الشعاع $v = (-7,-8)$ بدلالة القاعدة A

ع2: اكتب الشعاع $T = 3x - 7y$ بدلالة القاعدة A^*

الحل: ع1: $v = T_1(v)v_1 + T_2(v)v_2$

$T_1(v) = T_1(-7,-8) = 35 - 24 = 11$

$T_2(v) = T_2(-7,-8) = -14 + 8 = -6$

$\Rightarrow v = 11v_1 - 6v_2$

التحقق من الحل: $11v_1 - 6v_2 = (11,22) - (18,30)$

$= (-7,-8) = v$

ع2: $T = T(v_1)T_1 + T(v_2)T_2$

$T(v_1) = T(1,2) = 3 - 14 = -11$

$T(v_2) = T(3,5) = 9 - 35 = -26$

$\Rightarrow T = -11T_1 - 26T_2$

التحقق من الحل: $-11T_1 - 26T_2 = 55x - 33y$

$-52x + 26y = 3x - 7y$

((انتهت المحاضرة الأخيرة))

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >> << إعداد: فاطمة الشمسي >>